III.E Disques de Gershgorin

Proposition 38

Si $(P_k)_k$ est une suite de polynômes unitaires de degré n qui converge vers P (dans $\mathbb{C}[X]$), alors, pour la topologie de la norme, et à réarrangement près, les racines de P_k convergent vers les racines de P.

Démonstration. On procède par récurrence pour montrer cette proposition :

— le cas $\underline{n=1}$ est immédiat, $P_k = X - \lambda_1^{(k)} \to P = X - \lambda_1$

— supposons la proposition vraie au rang n, montrons la pour le rang $n+1$.
On note $\lambda_1^{(k)} = \mathrm{argmin}_{\lambda \in \mathrm{Rac}(P_k)}(|\lambda_1 - \lambda^{(k)}|)$. Alors :

$$P_k = (X - \lambda_1^{(k)})Q_k(X) \qquad\qquad P = (X - \lambda_1)Q(X)$$

où (Q_k) est une suite de polynômes unitaires de degré n. Montrons que Q_k converge vers Q. On note $a_m, a_m^{(k), b_m, b_m^{(k)}}$ les coefficients de P, P_k, Q, Q_k. On a lors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_m^{(k)} &= b_m^{(k)} - \lambda_1^{(k)} b_m^{(k)} \\ a_m &= b_m - \lambda_1 b_m \end{aligned}$$

Alors une récurrence descendante donne :

$$\begin{aligned} b_m^{(k)} &= a_{m+1}^{(k)} + \lambda_1^{(k)} a_{m+2}^{(k)} + \cdots + \left(\lambda_1^{(k)}\right)^{n-m-1} a_n^{(k)} + \left(\lambda_1^{(k)}\right)^{n-m} \\ b_m &= a_{m+1} + \lambda_1 a_{m+2} + \cdots + \lambda_1^{n-m-1} a_n + \lambda_1^{n-m} \end{aligned}$$

Or on sait que l'on a convergence de la suite $a_m^{(k)}$ vers a_m par convergence de P_k vers P, de plus $\lambda_1^{(k)}$ converge vers λ_1 car

$$|\lambda_1^{(k)} - \lambda_1| \leqslant \prod_{j=1}^{n+1} |\lambda_j^{(k)} - \lambda_1| = |P_k(\lambda_1)| \to |P(\lambda_1)| = 0$$

Donc on obtient finalement la convergence de $b_m^{(k)}$ vers b_m, c'est-à-dire la convergence de Q_k vers Q. Par hypothèse de récurrence, on conclut alors la preuve de cette proposition.

■

Théorème 39:

Soient C_j les composantes connexes de $D(A)$ et soient n_j le nombre de disque de Gershgorin dans C_j. Alors C_j contient exactement n_j valeurs propres de A.

Démonstration. On considère l'application continue :

$$\gamma \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \mapsto & (a_{i,j}(t)) \end{array} \qquad \text{où} \quad a_{i,j}(t) = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } j = i \\ t a_{i,j} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n,n} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \gamma(1) = A$$

On note $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r)$ définis dans le théorème et on défini $\Lambda_n^r = \{\underline{k} \in \mathbb{N}^r \quad / \quad k_1 + \cdots + k_r = n\}$. On définit enfin :

$$\mathcal{E}_{\underline{k}} = \{t \in [0,1] \quad / \quad C_j \text{ contienne exactement } \underline{k}_j \text{ valeurs propres de } \gamma(t)\}.$$

On a alors

$$[0,1] = \bigsqcup_{\underline{k} \in \Lambda_n^r} \mathcal{E}_{\underline{k}}.$$

On va montrer que $\mathcal{E}_{\underline{k}}$ est fermé pour tout $\underline{k}$, et alors par connexité de $[0,1]$ (comme l'union sera une union disjointe de fermé qui partition le connexe $[0,1]$), tous les $\mathcal{E}_{\underline{k}}$ seront vides à l'exception d'un seul : $\mathcal{E}_{\underline{n}} \ni 0$.
Soit $\underline{k} \in \Lambda_n^r$, on démontre la fermeture par caractérisation séquentielle.

Soit $(t_p)_p$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_{\underline{k}}$ qui converge vers $t \in [0,1]$. Montrons que $t \in \mathcal{E}_{\underline{k}}$.
On note $\lambda_1^{(p)}, \dots, \lambda_n^{(p)}$ les valeurs propres de $\gamma(t_p)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ celles de $\gamma(t)$.
Par continuité des valeurs propres (proposition précédentes) et ouverture des composantes connexes (elles sont en nombre fini), on dispose d'un entier N tel que pour tout entier $p \geqslant N$ si $\lambda_l \in C_j$ $\lambda_l^{(p)} \in C_j$. On en déduit ainsi $t \in \mathcal{E}_{\underline{k}}$, et donc $\mathcal{E}_{\underline{k}}$ est fermé.

Au total

$$[0,1] = \mathcal{E}_{\underline{n}}$$

et donc chaque composante connexe de $D(A)$ contient autant de valeurs propres de A que de disques de Gershgorin de A. ■